Démos

• Th 0 de König :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{V}(G)}$$

$$\vec{p} = \sum m_i \frac{d(\vec{OA_i})}{dt} = \sum m_i \frac{d(\vec{OG}+\vec{GA_i})}{dt} = m\vec{V}(G) + \underbrace{\frac{d(\sum m_i \vec{GA_i})}{dt}}_{=\vec{0}\ (\text{déf centre de masse})} \blacksquare$$

• Th 1 de König :

$$\boxed{\vec{L}_0 = \vec{L}^* + \vec{OG}\wedge\vec{p}}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{OA_i}\wedge\vec{p} = (\vec{OG}+\vec{GA_i})\wedge\vec{p} = \vec{OG}\wedge\vec{p} + \vec{L}^* \blacksquare$$

• Th 2 de König :

$$\boxed{K = K^* + \frac{1}{2}mV(G)^2}$$

$$K = \frac{1}{2}m_iV_i^2 = \frac{1}{2}m_i(\vec{V}(G) + \vec{V}_i^*)^2$$

$$= \frac{1}{2}mV(G)^2 + K^* + \frac{1}{2}m_i 2\vec{V}(G)\vec{V}_i^*$$

$$= \frac{1}{2}mV(G)^2 + K^* + \vec{V}(G)\underbrace{\frac{d(m_i\vec{GA_i})}{dt}}_{=0,\ \text{comme au Th 0}} \blacksquare$$

• Th du moment cinétique :

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_{ext_0} - m\vec{V}(0)\wedge\vec{V}(G)}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d(\vec{OA_i}\wedge\vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{OA_i}}{dt}\wedge\vec{p} + \vec{OA_i}\wedge\vec{F} = (\vec{V_i}-\vec{V}(0))\wedge m_i\vec{V_i} + \vec{M}_0$$

$$= m_i\vec{V_i}\wedge\vec{V}(0) + M_0 = \vec{M}_{ext_0} - m\vec{V}(0)\wedge\vec{V}(G) \blacksquare$$

. Thm de Huygens:

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta_G} + md^2}$$

$$I_\Delta := \int d(\Delta, A_i)^2 \, dm$$

$$= \int \left(d(\Delta, \Delta_G) + d(\Delta_G, A_i) \right)^2 dm$$

$$= md^2 + I_{\Delta_G} + \int 2\, d(\Delta, \Delta_G) \underbrace{d(\Delta_G, A_i)\, dm}_{=0 \text{ def center of mass}}$$

$$= I_{\Delta_G} + md^2 \quad \blacksquare$$

. Th d'équiprojectivité:

$$\boxed{\text{Si } \vec{A} \text{ équiprojectif} \Rightarrow \vec{A}(P) = \vec{A}(O) + \vec{V} \wedge \vec{OP}}$$

Définissons $\vec{f}(\vec{OP}) := \vec{A}(P) - \vec{A}(O)$

$-\vec{f}(\vec{OP}) \cdot (\vec{OQ}) = (\vec{OP}) \cdot \vec{f}(\vec{OQ})$ clairement f est antisymétrique.

Donc $\vec{f}(\vec{OP}) = \vec{V} \wedge \vec{OP}$ avec $\vec{V}$ fixe

$\Leftrightarrow \vec{A}(P) - \vec{A}(O) = \vec{V} \wedge \vec{OP}$

$\Leftrightarrow \vec{A}(P) = \vec{A}(O) + \vec{V} \wedge \vec{OP} \quad \blacksquare$

. Th de l'énergie Cinétique:

$\boxed{\Delta K = W_{Fext}}$ et $\boxed{\Delta K = -\Delta U}$ (si $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$)

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} \cdot \vec{v} = m \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{dK}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dK}{dt} dt = K(t_2) - K(t_1) = \Delta K$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = W(t_2) - W(t_1) = \Delta W_{Fext} \quad \blacksquare$$

Th de l'énergie cinétique propre :

$$\boxed{K^* = \frac{1}{2}\,\vec{\Omega}\cdot\vec{L}^*} \quad \text{et} \quad \boxed{K^* = \frac{1}{2}\, I_{\Delta_G}\,\Omega^2} \quad \text{(voir démo suivante)}$$

$$
\begin{aligned}
K^* &= \frac{1}{2} m_i \, v_i^{*2} \\
&= \frac{1}{2} m_i \, \vec{v}_i^{\,*} \cdot \big(\underbrace{\vec{v}(G)^*}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GA_i}\big) \\
&= \frac{1}{2} m_i \, \vec{\Omega} \cdot \big(\vec{GA_i} \wedge \vec{v}_i^{\,*}\big) \\
&= \frac{1}{2} \big(\vec{\Omega} \cdot \vec{L}^*\big) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Moment d'inertie :

$$\boxed{\vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\Omega}}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{L}_O &= \vec{OA_i} \wedge m_i \, \vec{v}(A_i) \\
&= \vec{OA_i} \wedge m_i \big(\vec{\Omega} \wedge \vec{OA_i}\big)
\end{aligned}
$$

(Sachant que : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) = a^2 \vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{a}$)

$$= m_i \, OA_i^2 \, \vec{\Omega} - \big(\vec{OA_i} \cdot \vec{\Omega}\big)\,\vec{OA_i}$$

$\Delta :=$ axe de rotation passant par O

$$\Leftrightarrow \vec{L}_\Delta = m_i \, d(\Delta, A_i)^2 \, \vec{\Omega} - \underbrace{\big(\vec{d(\Delta, A_i)} \cdot \vec{\Omega}\big)}_{=0 \text{ car } \perp} \vec{d(\Delta, A_i)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{L}_\Delta = m_i \, d(\Delta, A_i)^2 \, \vec{\Omega}$$

$$I_\Delta := m_i \, d(\Delta, A_i)^2$$

$$\Rightarrow \vec{L}_\Delta = I_\Delta \vec{\Omega}$$

Kepler et mécanique céleste :

- Mécanique à 2 corps : masse réduite $\boxed{\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}}$

- Force centrale // au vecteur position $\boxed{\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}}$

$$\Rightarrow \frac{dL_o}{dt} = 0 \Leftrightarrow L_o = cst$$

$$\vec{L}_o = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \mu\left(\dot{r}\hat{r} + \dot{\theta} r \hat{\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{L}_o = \mu r^2 \dot{\theta}\, \hat{z}} \text{ (constant)}$$

- Deuxième loi de Kepler : $\boxed{dS \text{ balayé pendant } dt \text{ est constant}}$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}\, dt = \frac{L_o\, dt}{2\mu} = cst \quad \blacksquare$$

- Troisième loi de Kepler : $\boxed{\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2}}$

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{L_o}{2\mu} dt \Leftrightarrow S = \frac{L_o}{2\mu} T = T = \frac{2\mu S}{L_o} = \frac{2\mu\pi ab}{L_o}$$

$$\left(\text{with } e = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow b = a\left(1-e^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$T^2 = \frac{4\mu^2\pi^2 a^4 (1-e^2)}{L_o^2} \qquad \left(\text{Formule de Binet : } a(1-e^2) = \frac{L_o^2}{\mu G M_1 M_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow T^2 = \frac{4\mu\pi^2 a^3}{G M_1 M_2} = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1+M_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1+M_2)}{4\pi^2}$$

$\boxtimes$

Gradient, divergence et rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales :

. Base dans $\mathbb{R}^3$; $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$

. Fonction $f(q_1, q_2, q_3) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

. Champ de vecteurs $\vec{A}(q_1, q_2, q_3) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

. Taux d'accroissement selon $\hat{u}_i$: h_i

. Gradient : $$\vec{\nabla} f = \frac{1}{h_i} \partial_{q_i} f \, \hat{u}_i$$

. Divergence : $$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\partial_{q_1} (A_1 h_2 h_3) + \partial_{q_2} (A_2 h_1 h_3) + \partial_{q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]$$

. Rotationnel : $$\int_S \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \, d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

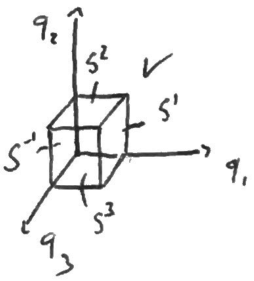
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \partial_{q_1} & \partial_{q_2} & \partial_{q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\partial_{q_2} (h_3 A_3) - \partial_{q_3} (h_2 A_2) \right) \hat{u}_1$$
$$\frac{1}{h_1 h_3} \left(\partial_{q_3} (h_1 A_1) - \partial_{q_1} (h_3 A_3) \right) \hat{u}_2$$
$$\frac{1}{h_1 h_2} \left(\partial_{q_1} (h_2 A_2) - \partial_{q_2} (h_1 A_1) \right) \hat{u}_3$$

Divergence en coordonnées curvilignes :

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} \qquad (\text{Stokes})$$

Vrai pour tout V ; prenons donc un parallélépipède curviligne.



$$\partial V = S^1 + S^2 + S^3 + S^{-1} + S^{-2} + S^{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{S^1+S^{-1}} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_{S^2+S^{-2}} \vec{A}\cdot d\vec{S} + \int_{S^3+S^{-3}} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

Notons que $d\vec{S}^i = dS^i\,\vec{n}_i = -dS^{-i}\,\vec{n}_i$

- $$\int_{S^1+S^{-1}} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{S^1+S^{-1}} \left(\vec{A}(dq_1,q_2,q_3)\cdot h_2 dq_2 h_3 dq_3\,\vec{n}_{q_1}\right) - \left(\vec{A}(0,q_2,q_3)\cdot h_2 dq_2 h_3 dq_3\,\vec{n}_{q_1}\right)$$
$$= \int_{S^1+S^{-1}} \left(A_1(dq_1,q_2,q_3)\,h_2h_3 - A_1(0,q_2,q_3)\,h_2h_3\right) dq_2\,dq_3$$
$$= \int_{S^1+S^{-1}} \partial_{q_1}(A_1 h_2 h_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$
$$= \int_{S^1+S^{-1}} \partial_{q_1}(A_1 h_2 h_3)\,\frac{dV}{h_1 h_2 h_3}$$

- $$\int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial V} \partial_{q_1}(A_1 h_2 h_3) + \partial_{q_2}(A_2 h_1 h_3) + \partial_{q_3}(A_3 h_1 h_2)\,\frac{dV}{h_1h_2h_3} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\partial_{q_1}(A_1h_2h_3) + \partial_{q_2}(A_2h_1h_3) + \partial_{q_3}(A_3h_1h_2)\right)$$